2025 香港中學文憑考試 數學 必修部分 卷一 建議答案

甲部 (1) (35 分)

1. $\dfrac{(x^4y^{-5})^3}{xy^2}$

$=\dfrac{x^{12}y^{-15}}{xy^2}$

$=\dfrac{x^{11}}{y^{17}}$

2. $\dfrac{1}{3d-4}-\dfrac{2}{6d+5}$

$=\dfrac{6d+5}{(3d-4)(6d+5)}-\dfrac{2(3d-4)}{(3d-4)(6d+5)}$

$=\dfrac{6d+5-6d+8}{(3d-4)(6d+5)}$

$=\dfrac{13}{(3d-4)(6d+5)}$

3. 我們可得 $2m+3n=999$ 及 $\dfrac{m}{n}=\dfrac{8}{7}$ 。

$\dfrac{m}{n}=\dfrac{8}{7}$

$m=\dfrac{8n}{7}$

把 $m=\dfrac{8n}{7}$ 代入 $2m+3n=999$ 。

$2\left(\dfrac{8n}{7}\right)+3n=999$

$37n=6993$

$n=189$

另解：

設 $m=8k$ 及 $n=7k$ 。

$2(8k)+3(7k)=999$

$37k=999$

$k=27$

因此， $n=189$ 。

4. (a) $(-2,-4)$

(b) 點 C 的坐標為 $(-2,-4+t)$ 。

由於 A 、 O 及 C 共線， OC 的斜率 $= OA$ 的斜率。

$$\frac{-4+t-0}{-2-0}=\frac{-2-0}{4-0}$$
$$-16+4t=4$$
$$t=5$$

5. (a)
$$\begin{aligned}&10pr-6qr\\&=2r(5p-3q)\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}&25p^2-9q^2\\&=(5p-3q)(5p+3q)\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}&25p^2-9q^2-10pr+6qr\\&=(5p-3q)(5p+3q)-2r(5p-3q)\\&=(5p-3q)(5p+3q-2r)\end{aligned}$$

6. (a)
$$\frac{6x+1}{2}<x-8 \qquad \text{或} \qquad 3x\le -21$$
$$6x+1<2x-16 \qquad\qquad x\le -7$$
$$4x<-17$$
$$x<-\frac{17}{4}$$

因此， (*) 的解為 $x<-\frac{17}{4}$ 。

(b) -5

7. (a) 設 $\$m$ 為該紀念品的標價。

$$m(1-60\%)=378$$
$$m=945$$

該紀念品的標價為 $945 。

(b) 設 $\$C$ 為該紀念品的成本。

$$C(1+75\%)=945$$
$$C=540$$

該紀念品的成本為 $540 。

(c) 該紀念品的售價

$= \$378$

$< \$540$

該紀念品的售價比該紀念品的成本低。

因此， 售出該紀念品後會虧蝕。

8. (a) $WS = WT$ (已知)

$\angle UWS = \angle VWT$ (對頂角)

$\angle USW = \angle VTW$ (內錯角，$SU // VT$)

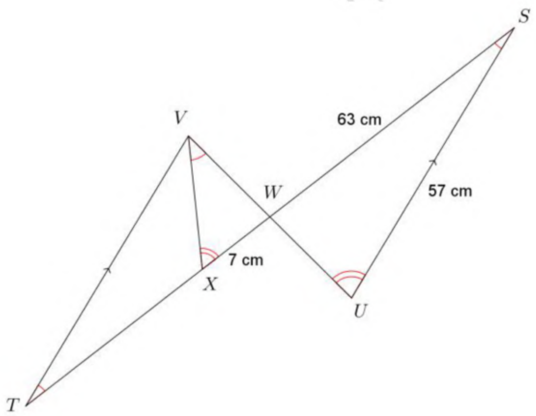
$\Delta SUW \cong \Delta TVW$ (ASA)

(b)(i) $\because \Delta SUW \cong \Delta TVW$

$WU = VW$ (全等 Δ 的對應邊)

$SU = TV$ (全等 Δ 的對應邊)

$\because \Delta SUW \sim \Delta VXW$



$\dfrac{VW}{SW} = \dfrac{WX}{WU}$ (相似 Δ 的對應邊)

$\dfrac{VW}{63} = \dfrac{7}{VW}$

$VW^2 = 441$

$VW = 21$ cm

$\dfrac{VX}{SU} = \dfrac{VW}{WS}$ (相似 Δ 的對應邊)

$\dfrac{VX}{57} = \dfrac{21}{63}$

$VX = 19$ cm

ΔTVX 的周界

$= TV + TX + VX$

$= 57 + (63 - 7) + 19$

$= 132$ cm

9. (a) 對於 s 的最小值，

$9 + 13 = 1 + s + 11$

$s = 10$

$\therefore s$ 的最小可能值為 10 。

另解：

由於該分佈的中位數為 7 ， 我們可得

$9+13<2+s+11$ 及 $s+11<9+13+2$

$9<s$ $\qquad$ $s<13$

$\therefore 9<s<13$

因此， s 的最小可能值為 10 。

(b) 12

(c) 對於 $s=10$ ， 該分佈的標準差 $=1.51$ 。

對於 $s=11$ ， 該分佈的標準差 $=1.50$ 。

對於 $s=12$ ， 該分佈的標準差 $=1.49$ 。

因此， 該分佈的最大可能標準差為 1.51 。

甲部 (2) (35 分)

10. (a)

$$\begin{aligned} f(-2) &= -45 \\ 2(-2)^3+h(-2)^2+k(-2)+15 &= -45 \\ 2h-k &= -22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{2}\right) &= 0 \\ 2\left(\frac{5}{2}\right)^3+h\left(\frac{5}{2}\right)^2+k\left(\frac{5}{2}\right)+15 &= 0 \\ 5h+2k &= -37 \end{aligned}$$

求解後， 我們可得 $h=-9$ 及 $k=4$ 。

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 2x^3-9x^2+4x+15 &= 0 \\ (2x-5)(x^2-2x-3) &= 0 \\ (2x-5)(x-3)(x+1) &= 0 \\ x &= \frac{5}{2},\ x=3 \text{ 或 } x=-1 \end{aligned}$$

$\frac{5}{2}$, 3 及 -1 均為有理數。

因此， 同意該宣稱。

11. (a) 設 $p(x)=ax+bx^2$ ， 其中 a 及 b 均為非零常數。

$$p(7)=56$$
$$a(7)+b(7)^2=56$$
$$a+7b=8$$
$$p(9)=216$$
$$a(9)+b(9)^2=216$$
$$a+9b=24$$

求解後， 我們可得 $a=-48$ 及 $b=8$ 。

因此， $p(x)=-48x+8x^2$ 。

(b) $$p(x)=c$$
$$8x^2-48x-c=0$$

由於 $p(x)=c$ 有兩個相異實根， $\Delta>0$ 。

$$(-48)^2-4(8)(-c)>0$$
$$32c>-2304$$
$$c>-72$$

12. (a) 該分佈的分佈域 $=42$ kg

該分佈的四分位數間距
$=42-25$
$=17$ kg

故此， 我們可得

$$69-(50+w)=17$$
$$w=2$$

(b)(i) $64-69=-5$ kg

由於訓練使該分佈的上四分位數下降了 5 kg 。

(ii) 訓練後，該分佈的分佈域
$=67-46$
$=21$ kg
<42 kg

訓練後， 該分佈的四分位數間距
$=64-54$
$=10$ kg
<17 kg

訓練後， 該分佈的分佈域及四分位數間距均下降了。

因此， 訓練後運動員的體重的分佈的離差較其訓練前的小。

13. (a) Γ 為 MN 的垂直平分線。

(b) 設 M 及 N 的坐標分別為 $(m, 0)$ 及 $(0, n)$ 。

MN 的中點的坐標為 $\left(\dfrac{m}{2}, \dfrac{n}{2}\right)$ 。

由於 Γ 為 MN 的垂直平分線， M 及 N 的中點位於 Γ 之上。

$$3\left(\frac{m}{2}\right)-2\left(\frac{n}{2}\right)-30=0$$

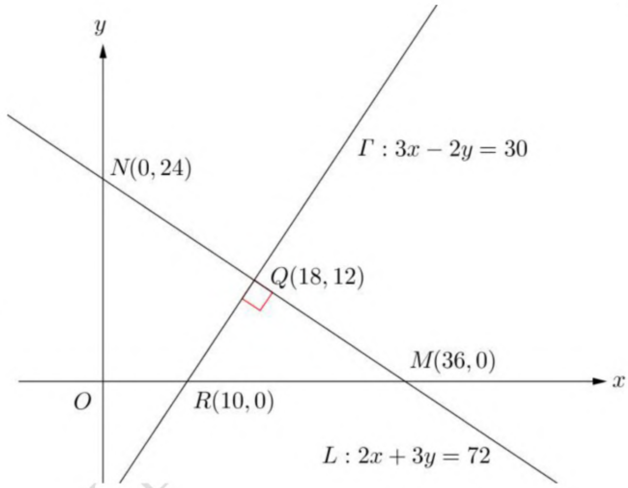
$$3m-2n-60=0$$

Γ 的斜率 $\times L$ 的斜率 $=-1$

$$\frac{3}{2}\times\frac{n-0}{0-m}=-1$$

$$3n=2m$$

求解後， 我們可得 $m=36$ 及 $n=24$ 。



L 的方程為

$$y=\frac{24-0}{0-36}x+24$$

$$-3y=2x-72$$

$$2x+3y-72=0$$

(c) 留意 Q 的坐標為 $(18, 12)$ 。

留意 R 的坐標為 $(10, 0)$ 。

四邊形 $ONQR$ 的面積

$=\Delta OMN$ 的面積 $-\Delta MQR$ 的面積

$$=\frac{(36-0)\times(24-0)}{2}-\frac{(36-10)\times(12-0)}{2}$$

$=276$

14. (a) 設 r cm 為該平截頭體的上底半徑。

$$\frac{r}{24}=\frac{45-30}{45}$$

$$r=8$$

X 的體積

$$=\frac{1}{3}\pi(24)^2(45)-\frac{1}{3}\pi(8)^2(45-30)$$

$=8\ 320\pi\ \text{cm}^3$

另解：

X 的體積

$$=\frac{1}{3}\pi(24)^2(45)\left[1-\left(\frac{45-30}{45}\right)^3\right]$$

$=8\ 320\pi\ \text{cm}^3$

(b) X 的總表面面積

$=\pi(8)^2+\pi(24)^2+\pi(24)(\sqrt{24^2+45^2})-\pi(8)\left[\sqrt{8^2+(45-30)^2}\right]$

$=1\ 728\pi\ \text{cm}^2$

(c) 設 x cm 為正方體的邊長。

$x^3=8\ 320\pi$

$x=29.67730087...$

正方體的總表面面積

$=6x^2$

$=6(29.67730087...)^2$

$=5\ 284.453123...$

$<1\ 728\pi$

因此， 正方體的總表面面積不超過 X 的總表面面積。

乙部 (35 分)

15. (a) 所求的概率

$=\dfrac{C_3^8+C_3^4}{C_3^{13}}$

$=\dfrac{30}{143}$

(b) 所求的概率

$=\dfrac{C_1^8\times C_1^4\times C_1^1}{C_3^{13}}$

$=\dfrac{16}{143}$

16. (a) $\log_3 x+\log_3 y=9$

$\log_3 x=9-u$

$\log_x 81-\log_y 9=1$

$\dfrac{\log_3 81}{\log_3 x}-\dfrac{\log_3 9}{\log_3 y}=1$

$\dfrac{4}{9-u}-\dfrac{2}{u}=1$

$4u-2(9-u)=u(9-u)$

$4u-18+2u=9u-u^2$

$u^2-3u-18=0$

(b) $u^2-3u-18=0$

$(u-6)(u+3)=0$

$u=6$ 或 $u=-3$

$\log_3 y=6$ 或 $\log_3 y=-3$

把 $\log_3 y=6$ 代入 $\log_3 x+\log_3 y=9$ ，

$\log_3 x+6=9$

$\log_3 x=3$

$x=27$

把 $\log_3 y=-3$ 代入 $\log_3 x+\log_3 y=9$ ，

$\log_3 x+(-3)=9$

$\log_3 x=12$

$x=3^{12}$ (捨去，由於 $y=3^{-3}$ 及 x 應小於 y)

因此， $x=27$ 。

17. (a) 設 d 為該等差數列的公差。

$\mathrm{T}(47)=456$

$\mathrm{T}(1)+46d=456$

$\mathrm{T}(1)=456-46d$

考慮 $\mathrm{T}(9),\mathrm{T}(47),\mathrm{T}(199)$ 為一等比數列。

$$\frac{\mathrm{T}(47)}{\mathrm{T}(9)}=\frac{\mathrm{T}(199)}{\mathrm{T}(47)}$$

$$\frac{\mathrm{T}(1)+46d}{\mathrm{T}(1)+8d}=\frac{\mathrm{T}(1)+198d}{\mathrm{T}(1)+46d}$$

$$\left[\mathrm{T}(1)+46d\right]^2=\left[\mathrm{T}(1)+8d\right]\left[\mathrm{T}(1)+198d\right]$$

$$\left[\mathrm{T}(1)\right]^2+92d\,\mathrm{T}(1)+2\,116d^2=\left[\mathrm{T}(1)\right]^2+206d\,\mathrm{T}(1)+1\,584d^2$$

$$532d^2-114d\,\mathrm{T}(1)=0$$

$$d\left[14d-3(456-46d)\right]=0$$

$$d(152d-1\,368)=0$$

$d=9$ 或 $d=0$ (捨去，由於 $\mathrm{T}(1)\neq\mathrm{T}(2)$)

$\mathrm{T}(1)=456-46(9)=42$

(b) $\dfrac{n\left[2a+(n-1)d\right]}{2}>10^6$

$\dfrac{n\left[2(42)+(n-1)(9)\right]}{2}>10^6$

$9n^2+75n-2\times10^6>0$

$n<\dfrac{-75-\sqrt{75^2-4(9)(-2\times10^6)}}{2\times9}$ 或 $n>\dfrac{-75+\sqrt{75^2-4(9)(-2\times10^6)}}{2\times9}$

$n<-475.5896013...$ 或 $n>467.256268...$

因此， n 的最小值為 468 。

18. (a) $g(x)$

$=3x^2-6kx+24x+3k^2-24k+55$

$=3(x^2-2kx+8x)+3k^2-24k+55$

$=3\left[x^2-2(k-4)x+(k-4)^2-(k-4)^2\right]+3k^2-24k+55$

$=3\left[x-(k-4)\right]^2-3(k-4)^2+3k^2-24k+55$

$=3\left[x-(k-4)\right]^2+7$

因此， R 的坐標為 $(k-4,7)$ 。

(b)(i) 留意 S 的坐標為 $(k+2,-3)$ 。

設 T 的坐標為 (x,y) 。

由於 O 為 ΔRST 的垂心，

故此， $OT\perp RS$ 及 $OR\perp TS$ 。

$$\frac{y-0}{x-0}\times\frac{7-(-3)}{k-4-(k+2)}=-1$$

$$\frac{y}{x}=\frac{6}{10}$$

$$y=\frac{3}{5}x$$

$$\frac{7-0}{k-4-0}\times\frac{y-(-3)}{x-(k+2)}=-1$$

$$7(y+3)=-\left[x-(k+2)\right](k-4)$$

$$7\left(\frac{3x}{5}+3\right)=-\left[(k-4)x-(k-4)(k+2)\right]$$

$$21x+105=-5(k-4)x+5(k-4)(k+2)$$

$$\left[5(k-4)+21\right]x=5(k-4)(k+2)-105$$

$$x=\frac{5k^2-10k-145}{5k+1}$$

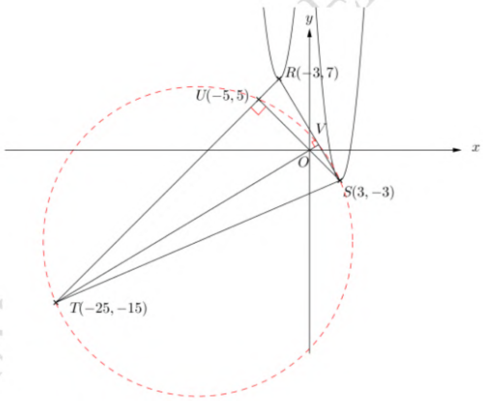
$$y=\frac{3}{5}\left(\frac{5k^2-10k-145}{5k+1}\right)$$
$$=\frac{3k^2-6k-87}{5k+1}$$

T 的坐標為 $\left(\frac{5k^2-10k-145}{5k+1},\frac{3k^2-6k-87}{5k+1}\right)$ 。

(b)(ii)由於 S 、 T 、 U 及 V 為共圓，

$\angle TUS=\angle TVS=90°$ (同弓形內的圓周角)

$\therefore TU$ 的斜率 $\times$ US 的斜率 $=-1$



$$\frac{\frac{3k^2-6k-87}{5k+1}-5}{\frac{5k^2-10k-145}{5k+1}-(-5)}\times\frac{-3-5}{k+2-(-5)}=-1$$
$$\frac{3k^2-6k-87-5(5k+1)}{5k^2-10k-145+5(5k+1)}=\frac{k+7}{8}$$
$$\frac{3k^2-31k-92}{5k^2+15k-140}=\frac{k+7}{8}$$
$$5k^3+35k^2+15k^2+105k-140k-980=24k^2-248k-736$$
$$5k^3+26k^2+213k-244=0$$
$$(k-1)(5k^2+31k+244)=0$$

$\therefore k-1=0$ 或 $5k^2+31k+244=0$

$k=1$ 　　沒有實數解

$\therefore k=1$

19. (a) 由於 C 通過 $(-10,9)$ ， 我們可得

$$(-10)^2+(9)^2-10a-2(9)+b=0$$
$$b=10a-163$$

$$4x-3y+83=0$$
$$y=\frac{4x+83}{3}$$

把 $y=\frac{4x+83}{3}$ 及 $b=10a-163$ 代入 $x^2+y^2+ax-2y+b=0$ ， 我們可得

$$x^2+\left(\frac{4x+83}{3}\right)^2+ax-2\left(\frac{4x+83}{3}\right)+10a-163=0$$
$$9x^2+(4x+83)^2+9ax-6(4x+83)+90a-1467=0$$
$$9x^2+16x^2+664x+6889+9ax-24x-498+90a-1467=0$$
$$25x^2+(9a+640)x+90a+4924=0$$

由於 L 為 C 的切線 ， 故此 L 及 C 只有一個交點。

因此， 方程 $25x^2+(9a+640)x+90a+4924=0$ 有相同實根。

$$\Delta=0$$
$$(9a+640)^2-4(25)(90a+4924)=0$$
$$81a^2+2520a-82800=0$$
$$a=20 \text{ or } a=-\frac{460}{9}\,(\text{刪去})$$

$b=37$

(b)(i) 留意 C 的方程為 $x^2+y^2+20x-2y+37=0$ 。

因此， I 的坐標為 $(-10,1)$ 。

C 的半徑 $=\sqrt{(-10)^2+1^2-37}=8$

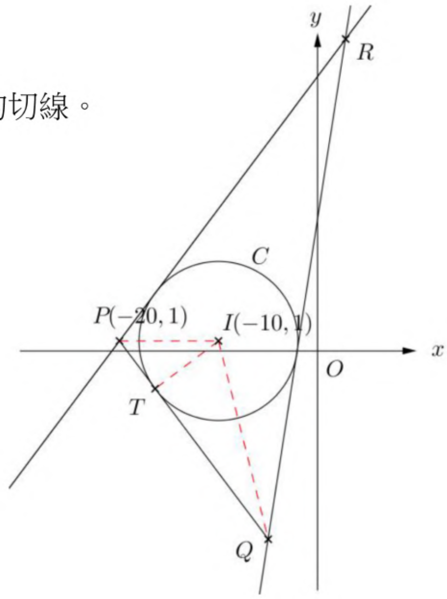
$$PI=-10-(-20)$$
$$=10$$

設 T 為 PQ 上的一點使得 PQ 為 C 在點 T 的切線。

考慮 ΔIPT ，

$$\cos\angle IPT=\frac{PT}{IP}$$
$$=\frac{\sqrt{10^2-8^2}}{10}$$
$$=\frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos\angle IPQ=\frac{3}{5}$$



(ii) 考慮 ΔIPQ ， 藉餘弦公式，

$$IQ^2=IP^2+PQ^2-2(IP)(PQ)\cos\angle IPQ$$
$$IQ^2=(10)^2+(25)^2-2(10)(25)\left(\frac{3}{5}\right)$$
$$IQ=\sqrt{425}$$
$$=5\sqrt{17}$$

另解：

$$TQ=25-\sqrt{10^2-8^2}=19$$
$$IQ=\sqrt{8^2+19^2}\ (\text{畢氏定理})$$
$$=\sqrt{425}$$
$$=5\sqrt{17}$$

(iii) $\sin\angle IQT = \dfrac{IT}{IQ}$

$\sin\angle IQT = \dfrac{8}{5\sqrt{17}}$

$\angle IQT = 22.83365418...^\circ$

$\cos\angle IPT = \dfrac{3}{5}$

$\angle IPT = 53.13010235...^\circ$

由於 I 為 ΔPQR 的內心，

$\angle IPR = \angle IPT = 53.13010235...^\circ$

$\angle IQR = \angle IQT = 22.83365418...^\circ$

ΔPQR 中，

$\angle PRQ = 180^\circ - 2\times(53.13010235...^\circ) - 2\times(22.83365418...^\circ)$ (Δ 內角和)

$\angle PRQ = 28.07248694...^\circ$

藉正弦公式，

$$\frac{RQ}{\sin\angle QPR} = \frac{PQ}{\sin\angle PRQ}$$

$$\frac{RQ}{\sin(2\times 53.13010235...^\circ)} = \frac{25}{\sin 28.07248694...^\circ}$$

$$RQ = 51$$

留意 RQ 為 ΔPQR 中最長的一條邊。

圓的直徑 $\geq RQ$

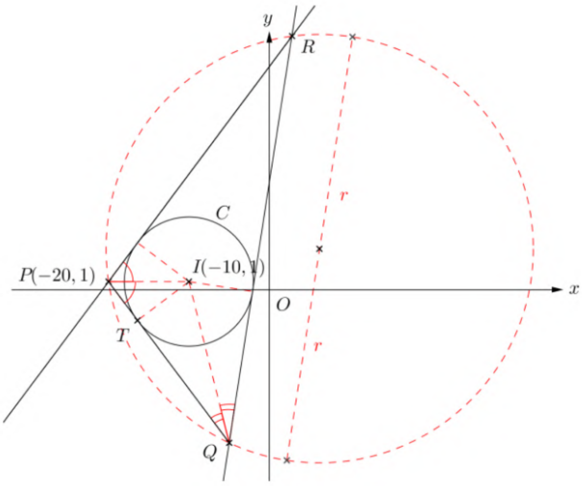
$2r \geq RQ$

$2r \geq 51$

$r \geq \dfrac{51}{2}$

$> PQ$

因此，同意該宣稱。



另解 1：

$$\sin\angle IQT=\frac{IT}{IQ}$$

$$\sin\angle IQT=\frac{8}{5\sqrt{17}}$$

$$\angle IQT=22.83365418...^\circ$$

$$\cos\angle IPT=\frac{3}{5}$$

$$\angle IPT=53.13010235...^\circ$$

由於 I 為 ΔPQR 的內心，

$$\angle IPR=\angle IPT=53.13010235...^\circ$$

$$\angle IQR=\angle IQT=22.83365418...^\circ$$

ΔPQR 中，

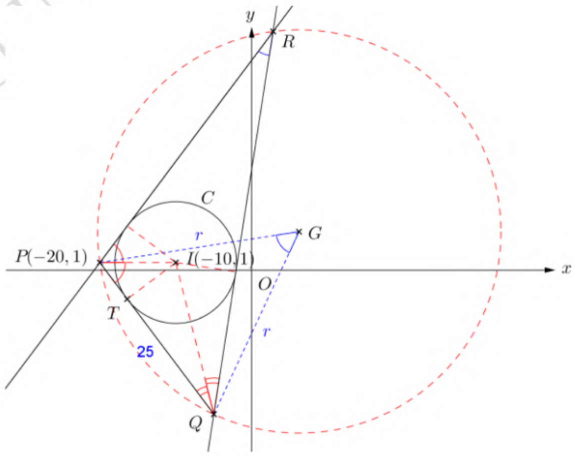
$$\angle PRQ=180^\circ-2\times(53.13010235...^\circ)-2\times(22.83365418...^\circ)\ \ (\Delta\text{ 內角和})$$

$$\angle PRQ=28.07248694...^\circ$$

設 G 為 ΔPQR 外接圓的圓心。

$$\begin{aligned}\angle PGQ&=2\times\angle PRQ\ \ (\text{圓心角兩倍於圓周角})\\&=2\times 28.07248694...^\circ\\&=56.14497387...^\circ\end{aligned}$$

考慮 ΔPQG ，藉餘弦公式，



$$PQ^2=PG^2+GQ^2-2(PG)(QG)\cos\angle PGQ$$

$$25^2=r^2+r^2-2r^2\cos 56.14497387...^\circ$$

$$625=r^2(2-2\cos 56.14497387...^\circ)$$

$$\begin{aligned}r&=26.5625\\&>PQ\end{aligned}$$

因此，同意該宣稱。

另解 2：

$$\sin \angle IQT = \frac{IT}{IQ}$$

$$\sin \angle IQT = \frac{8}{5\sqrt{17}}$$

$$\angle IQT = 22.83365418...^\circ$$

$$\cos \angle IPT = \frac{3}{5}$$

$$\angle IPT = 53.13010235...^\circ$$

由於 I 為 ΔPQR 的內心，

$\angle IPR = \angle IPT = 53.13010235...^\circ$

$\angle IQR = \angle IQT = 22.83365418...^\circ$

ΔPQR 中，

$\angle PRQ = 180^\circ - 2\times(53.13010235...^\circ) - 2\times(22.83365418...^\circ)$ (Δ 內角和)

$\angle PRQ = 28.07248694...^\circ$

將 ΔPQR 的外接圓上的一點記為 S，使得 PS 為一直徑。

$\angle PQS = 90^\circ$ (半圓上的圓周角)

$\angle PSQ = \angle PRQ = 28.07248694...^\circ$ (同弓形內的圓周角)

$$\frac{PQ}{PS} = \sin \angle PSQ$$

$$\frac{25}{2r} = \sin 28.07248694...^\circ$$

$$r = 26.5625$$

$$> PQ$$

因此，同意該宣稱。